

# Приложение на методите на Рунге – Кута за решаване на уравненията за отравяне на ядрения реактор

## 1. Въведение

В доклада са направени поредица от изчисления върху уравненията за отравяне на ядрения реактор от изотопите  $^{135}\text{Xe}$  и  $^{149}\text{Sm}$ . Известно е [1], че тези уравнения имат аналитични решения. Това обстоятелство е използвано за да се оцени точно относителната грешка в решението при прилагане на поредица от различни стъпки на интегриране и изпробване на различни числени методи. Използваните числени процедури са реализирани в среда на MATLAB.

Разгледани са следните три случая – отравяне от  $^{135}\text{Xe}$  и  $^{149}\text{Sm}$  при първоначално пускане на реактора, отравяне от тези два изотопа при намаляване мощността с 30%, както и отравянето от  $^{135}\text{Xe}$  след спиране на реактора.

## 2. Резултати от проведените изчисления

Известно е, че размерът на стъпката на интегриране има директно отношение към точността на полученото решение. Обичайната представа за стъпката е да бъде по-малка от единица, така, че грешката да се оценява според метода с някаква степен на стъпката, която ще бъде още по-малка от единица. От друга страна, преходните процеси на отравяне от  $^{135}\text{Xe}$  и  $^{149}\text{Sm}$  до установяване на стационарните им концентрации са с продължителност от няколко до десетки денонощия. По тази причина, при представяне на уравненията в секунда, използването на стъпка, която е по-малка от единица би довело до много дълъг изчислителен процес. Този факт налага уравненията за отравянето да бъдат преработени с мерна единица за времето час.

За сравнение на ефекта на преобразуването на секундите в часове е използвано уравнението за концентрацията на  $^{135}\text{I}$  при пускане на ядрения реактор:

$$\frac{dN_j}{dt} = P_j \sum_{f5} \Phi - \lambda_j N_j$$

Това уравнение може да се използва самостоятелно.

В табл.1 са представени резултатите от серията изчисления върху това уравнение в два случая: за време измерено в секунди и за време измерено в часове.

Метод	Стъпка	Относителна грешка	Стъпка	Относителна грешка	Стъпка	Относителна грешка
Рунге–Кута 2 в секунди	h = 1	5.9 x 10 <sup>-13</sup>	h = 10	5.9 x 10 <sup>-11</sup>	h = 3600	8.4 x 10 <sup>-6</sup>
Рунге–Кута 2 в часове	h = 0.01	7.7 x 10 <sup>-10</sup>	h = 0.1	7.8 x 10 <sup>-8</sup>	h = 1	8.4 x 10 <sup>-6</sup>
Рунге–Кута 4 в секунди	h = 1	4.9 x 10 <sup>-15</sup>	h=10	0	h=3600	4.5 x 10 <sup>-9</sup>
Рунге–Кута 4 в часове	h = 0.01	1.1 x 10 <sup>-15</sup>	h=0.1	4.1 x 10 <sup>-13</sup>	h=1	4.5 x 10 <sup>-9</sup>
Рунге–Кута 4 с Ромберг секунди	h = 1	1.3 x 10 <sup>-15</sup>	h=10	2.2 x 10 <sup>-15</sup>	h=3600	1.2 x 10 <sup>-11</sup>
Рунге–Кута 4 с Ромберг часове	h = 0.01	7.7 x 10 <sup>-16</sup>	h=0.1	1.4 x 10 <sup>-15</sup>	h=1	1.2 x 10 <sup>-11</sup>

Табл.1 Решения при различни числени методи и стъпки

Може да се отбележи, че при една и съща абсолютна стойност на стъпката от 1h относителната грешка в резултата е една и съща и за двата случая. Това показва, че в представянето на уравнението няма значение мерната единица. По тази причина в следващите изчисления се използват уравнения с мерна единица секунда.

Същата серия от изчисления е направена и с цел да се избере подходящ метод за интегриране на цялата система уравнения. За решаване на диференциалните уравнения с начални условия са използвани са следните три метода:

- метод на Рунге–Кута от втори ред;
- метод на Рунге–Кута от четвърти ред;
- метод на Рунге–Кута от четвърти ред с екстраполация по Ромберг[2].

Екстраполацията по Ромберг се състои в следното: ако  $Y_{n+1}$  е полученото със стъпка  $h$  за коя да е неизвестна функция в момент  $t_{n+1}$ , а  $Y_{n+1}^*$  е получената стойност след двукратно интегриране със стъпка  $h/2$ , то ново, по-добро приближение се получава по следната формула:

$$Y_{new} = Y_{n+1}^* + \frac{Y_{n+1}^* - Y_{n+1}}{2^4 - 1}$$

Табл.1 представя относителната грешка при различните стъпки по времето при използване на трите метода върху уравнението за <sup>135</sup>I. Както се вижда и както се очаква, най-дори резултати се получават при метода на Рунге–Кута от четвърти ред с екстраполация по Ромберг.

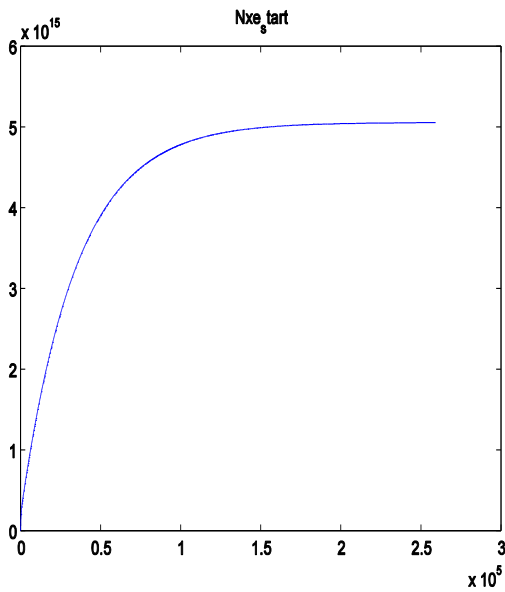
За това в следващите изчисления на системите уравнения за отравянето от <sup>135</sup>Xe и <sup>149</sup>Sm се използва именно този метод.

Следващото разглеждане е върху системата за отравяне с <sup>135</sup>Xe.

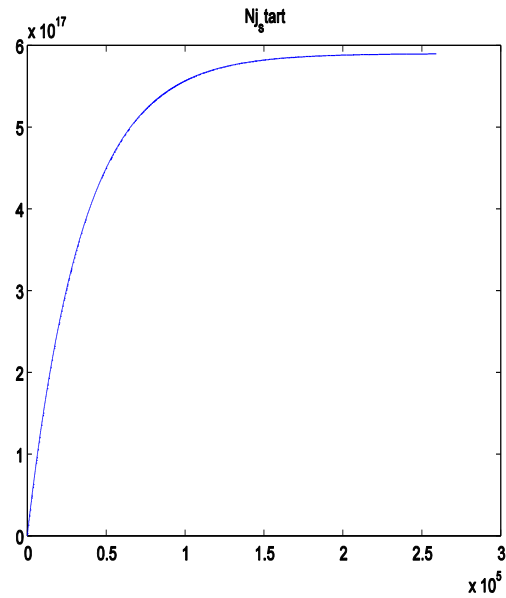
$$\frac{dN_J}{dt} = P_J \Sigma_{f5} \Phi - \lambda_J N_J$$

$$\frac{dN_{Xe}}{dt} = P_{Xe} \Sigma_{f5} \Phi + \lambda_J N_J - \lambda_{Xe} N_{Xe} - \sigma_{a,Xe} N_{Xe} \Phi$$

Добро приближение за стационарните концентрации на  $^{135}\text{Xe}$  и  $^{135}\text{I}$  се получава след три денонощия. Графиката на фиг.1 показва промяната в концентрацията на  $^{135}\text{Xe}$  три денонощия след пускане на ядрения реактор, а на графиката на фиг.2 е показана промяната на концентрацията на  $^{135}\text{I}$ .

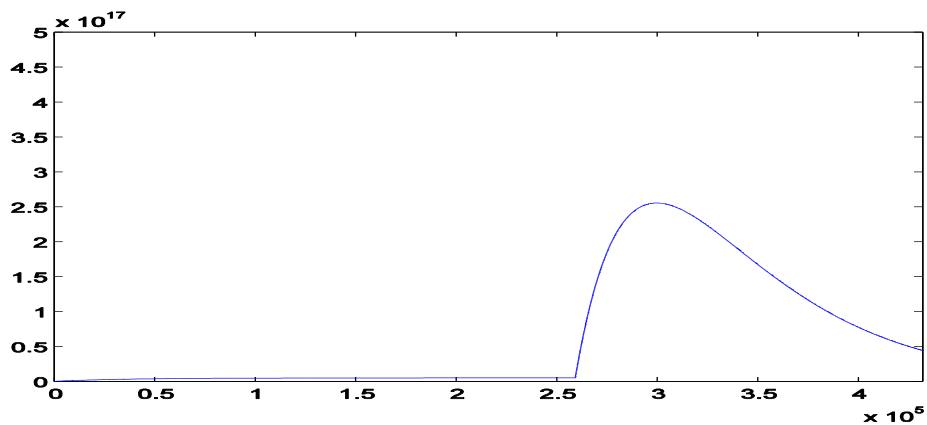


Фиг.1 Стационарна концентрация на  $^{135}\text{Xe}$



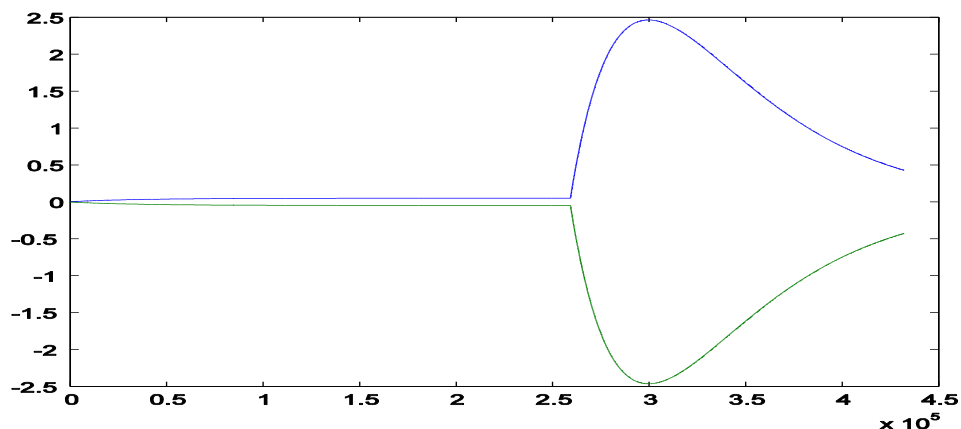
Фиг.2 Стационарна концентрация на  $^{135}\text{I}$

На фиг.3 се проследява и изменението на концентрацията на  $^{135}\text{Xe}$  две денонощия след спирането на реактора.



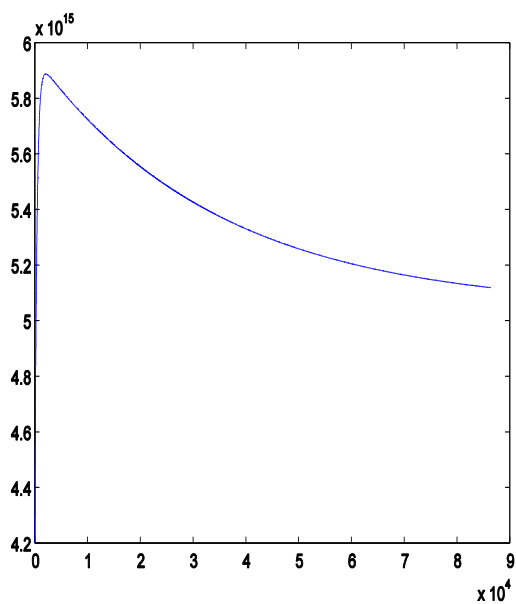
Фиг.3. Изменение на концентрация на  $^{135}\text{Xe}$

На графиката на фиг.4 е показано увеличаването на отравянето от  $^{135}\text{Xe}$  (в синьо) и съответно намаляването на реактивността (в зелено) по тази причина три денонощия след пускане на ядрения реактор и две денонощия след спирането му.

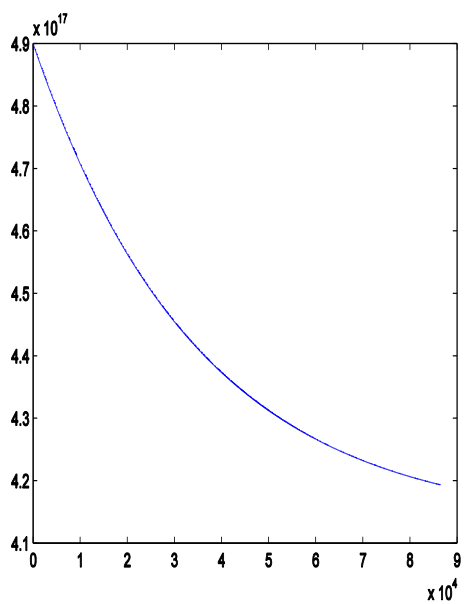


Фиг.4 Отравяне от  $^{135}\text{Xe}$  и намаляване на реактивността при спиране на ЯР

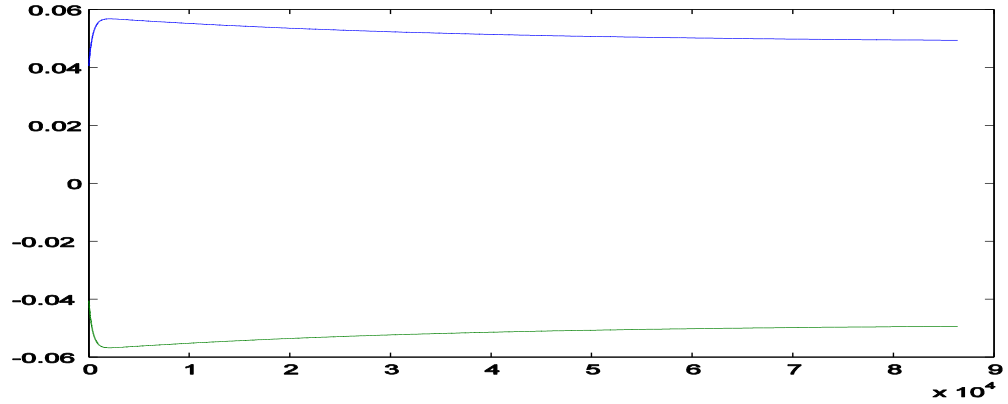
Следващият експеримент е направен след достигане на стационарните концентрации на  $^{135}\text{Xe}$  (фиг.5) и  $^{135}\text{I}$  (фиг.6) след намаляване мощността на ядрения реактор с 30%. Началните условия за концентрациите им са взети от предходното изчисление.



Фиг.5 Концентрация на  $^{135}\text{Xe}$



Фиг.6 Концентрация на  $^{135}\text{I}$



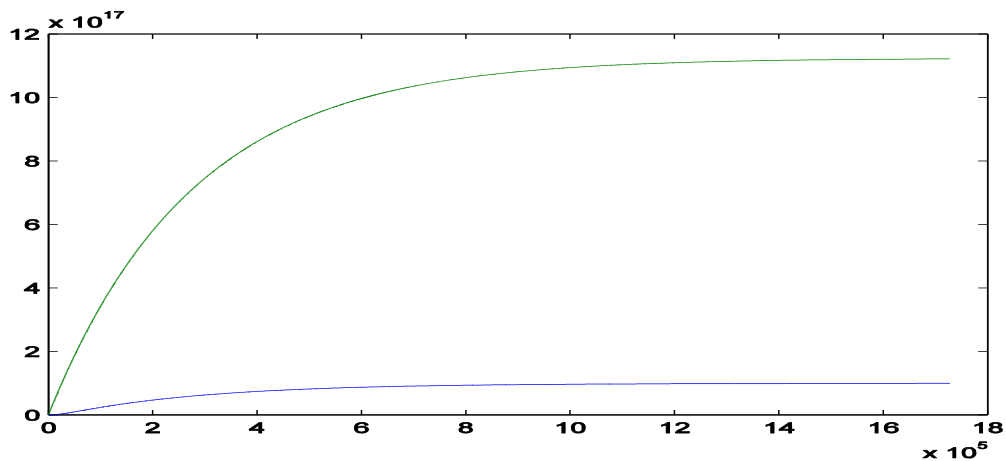
Фиг.7 Изменение на отравянето от Хе (в синьо) и реактивността (в зелено) при намаляване на мощността с 30%

Същата серия изчисления е направена и за отравянето със  $^{149}\text{Sm}$ , решавайки следните диференциални уравнения:

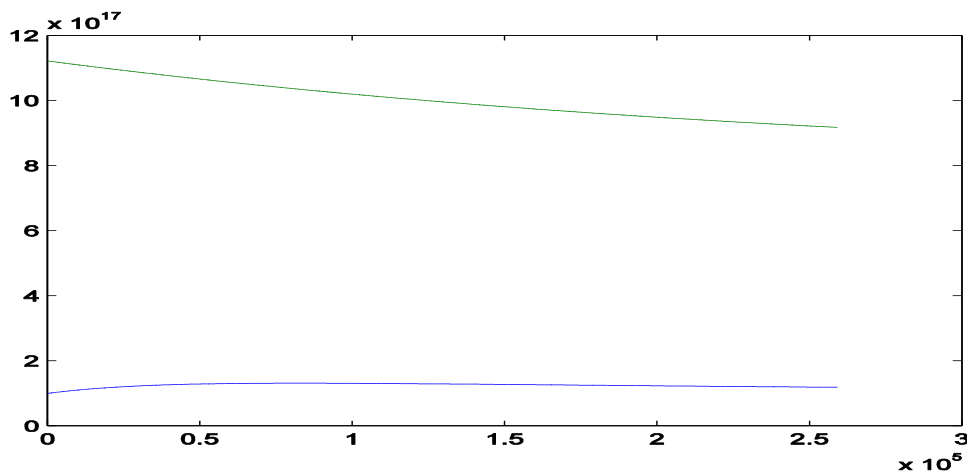
$$\frac{dN_{Pm}}{dt} = P_{Pm} \Sigma_{f,\Gamma} \Phi - \lambda_{Pm} N_{Pm}$$

$$\frac{dN_{Sm}}{dt} = \lambda_{Pm} N_{Pm} - \sigma_{a,Sm} N_{Sm} \Phi$$

На фиг.8 е показан процесът за достигане на стационарните концентрации на  $^{149}\text{Pm}$  и  $^{149}\text{Sm}$  след 20 денонощия, а фиг.9 показва намаляване на концентрациите им след намаляване на мощността на реактора с 30% след 3 денонощия.



Фиг.8 Стационарни концентрации на  $^{149}\text{Pm}$  и  $^{149}\text{Sm}$



Фиг.9 Намаляване на концентрациите на  $^{149}\text{Pt}$  и  $^{149}\text{Sm}$  след намаляване на мощността с 30%

### 3. Заключение

Представените резултати постигат целта на доклада, а именно – получаване на обективна оценка за точността на използваните методи поради факта, че разглежданите уравнения имат точно решение. Така, очевидно от използваните методи за предпочитане в бъдеще е методът на Рунге–Кута от четвърти ред с екстраполация по Ромберг.

В доклада е използвана постоянна стъпка на интегриране. За съвместното решение на уравнения в които неизвестните функции имат различен по продължителност преходен процес това не е подходящо. В такива случаи може да се прибегне до автоматичен избор на стъпката. Това се изразява в следното – в интервалите от време, в които някоя от неизвестните функции се изменя бързо, стъпката трябва да бъде малка, докато в случаите, при които процесите се развиват по-бавно – стъпката да се увеличава.

### 4. Използвана литература

- [1] Г.Глухов, Ядрени енергийни реактори, Ифо Дизайн, 2004
- [2] Г.Венков, В.Пашева, Числено моделиране с ОДУ, ТУ-София, 2007